Université du Sud - Toulon - Var
ISITV - $1^{\text{ère}}$ année

Examen de rattrapage d'Éléments Finis du 13 mars 2008
Corrigé

Exercice 1. 1. **(3 points)** On obtient

$$\begin{aligned} N_1(x,y) &= 1 - \tfrac{1}{h}x - \tfrac{1}{h}y + \tfrac{1}{h^2}xy, \\ N_2(x,y) &= \tfrac{1}{h}x - \tfrac{1}{h^2}xy, \\ N_3(x,y) &= \tfrac{1}{h^2}xy, \\ N_4(x,y) &= \tfrac{1}{h}y - \tfrac{1}{h^2}xy. \end{aligned}$$

2. **(2 points)** On obtient

$$B_k^{Q,loc} = \frac{h^2}{4}, \quad \text{pour } k = 1, \ldots, 4.$$

3. **(3 points)** La méthode d'éléments finis donne

$$\frac{8}{3}u_j - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{8} u_{j_k} = \frac{h^2}{4}.$$

4. **(2 points)** La méthode des différences finies donne

$$4u_j - u_{j_1} - u_{j_3} - u_{j_5} - u_{j_7} = h^2.$$

On peut interpréter le schéma à 9 points comme étant une combinaison du schéma à 5 points et du schéma a 5 points obtenu après rotation des axes de $\pi/4$ et avec pour nouveau pas $h\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{3}\big(4u_j - u_{j_1} - u_{j_3} - u_{j_5} - u_{j_7} - h^2\big) \\ &+\tfrac{1}{3}\big(4u_j - u_{j_2} - u_{j_4} - u_{j_6} - u_{j_8} - 2h^2\big) = 0. \end{aligned}$$

Exercice 2. 1. **(2,5 points)** On a $C = \max\{k^-, k^+\}$ et $\alpha = \min\{k^-, k^+\}$.

2. **(2,5 points)** Lax-Milgram.

3. **(2,5 points)** Si on prend une fonction teste nulle sur Ω^+ on obtient

$$\begin{aligned} -k^-\Delta u = f \quad & \text{dans } \Omega^-, \\ u = 0 \quad & \text{sur } \partial\Omega^-. \end{aligned}$$

4. **(2,5 points)** La condition de transmission est

$$k^- \frac{\partial u^-}{\partial n} = k^+ \frac{\partial u^+}{\partial n} \quad \text{sur } H.$$