

# Examen de Volumes Finis ISITV/POLYTECH/CEMEF

Paola Goatin  
24 février 2010

**Notes du cours et documents INTERDITS. 2 pages d'énoncé.  
Durée de l'épreuve : 2h.**

On considère le système de Aw et Rascle pour la modélisation macroscopique du trafic routier :

$$\begin{aligned}\rho_t + (\rho v)_x &= 0, \\ (\rho(v + p(\rho)))_t + (\rho v(v + p(\rho)))_x &= 0.\end{aligned}\tag{1}$$

où  $\rho > 0$  est la densité des véhicules,  $v$  leur vitesse moyenne et  $p$  joue le rôle d'un facteur d'anticipation (on assume  $p'(\rho) > 0$  et  $p''(\rho) \geq 0$ , par exemple on pourra prendre  $p(\rho) = \rho^2$ ).

1. **(3 points)** Ecrire le système sous la forme d'un système de lois de conservation

$$\mathbf{u}_t + f(\mathbf{u})_x = 0$$

(expliciter le vecteur des quantités conservées  $\mathbf{u}$  et la fonction flux). En se plaçant dans les variables  $\mathbf{v} = (\rho, v)$ , montrer que le système (1) est équivalent au système

$$\begin{pmatrix} \rho_t \\ v_t \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} \rho_x \\ v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} v & \rho \\ 0 & v - \rho p'(\rho) \end{pmatrix}.$$

Calculer les valeurs propres de la matrice  $A$  et montrer que le système est strictement hyperbolique pour  $\rho > 0$ . Vérifier que les valeurs propres sont naturellement ordonnées ( $\lambda_1(\mathbf{v}) < \lambda_2(\mathbf{v})$ ), ce qui permet de définir sans ambiguïté les 1- et 2-champs caractéristiques.

Que se passe-t-il quand  $\rho = 0$  (dans le vide) ?

2. **(2 points)** Calculer les vecteurs propres de la matrice  $A$  et montrer que le premier champ caractéristique est vraiment non-linéaire, tandis que le deuxième est linéairement dégénéré.
3. **(2 points)** Calculer les invariants de Riemann du système (les chercher sous la forme  $W(\rho, v) = v + \phi(\rho)$ ).
4. **(4 points)** Soit une détente de la première famille reliant un état gauche  $(\rho_L, v_L)$  à un état droit  $(\rho, v)$ . Montrer que les états  $(\rho_L, v_L)$  et  $(\rho, v)$

vérifient la condition de Rankine-Hugoniot (pour une certaine vitesse  $\sigma$  à expliciter). Vérifier que les ondes de la deuxième famille ont la même propriété (ils s'agit de discontinuités de contact). Cela signifie que les courbes des détenteurs coïncident avec les courbes des chocs et le système est dit "de Temple".

Tracer ces courbes dans le demi-plan  $\{(\rho, v) \in \mathbb{R}^2 : \rho > 0\}$ .

5. **(1 point)** On considère la fonction

$$\bar{\mathbf{v}}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{v}_L & \text{si } x/t < \sigma, \\ \mathbf{v}_R & \text{si } x/t > \sigma, \end{cases}$$

$$\mathbf{v}_L = \begin{pmatrix} \rho_L \\ v_L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_R = \begin{pmatrix} \rho_R \\ v_R \end{pmatrix},$$

$$\rho_L = 1, \quad v_L = 1, \quad \rho_R = 2, \quad v_R = 1, \quad \sigma = 1.$$

Vérifier que  $\bar{\mathbf{v}}$  est une discontinuité de contact de la deuxième famille. Noter en particulier que la vitesse  $v$  est constante ( $v_L = v_R = v_0$ ).

6. **(4 points)** On approche numériquement la fonction  $\bar{\mathbf{v}}$  par la méthode de Godunov. Montrer qu'à l'issue du premier pas de temps, la vitesse discrète vérifie :

$$v_j^1 \geq \bar{v}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

et l'inégalité est stricte en  $j = 1$  (si  $x_{1/2} = 0$ ). En d'autres termes, la méthode de Godunov ne respecte pas le principe du maximum sur les vitesses.

On pourra répondre à cette question en recourant à la formulation intégrale de la méthode de Godunov :

$$\mathbf{u}_j^1 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \mathbf{u}(x, \Delta t) dx, \quad j \in \mathbb{Z},$$

et en observant que la fonction  $\rho \mapsto \rho p(\rho)$  est convexe. En effet, l'inégalité de Jensen nous dit alors que

$$\overline{\rho p(\rho)} \geq \bar{\rho} p(\bar{\rho}),$$

où  $\bar{\alpha}$  désigne la moyenne intégrale

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} \alpha(x, \Delta t) dx$$

7. **(4 points)** Montrer que la fonction

$$\mathcal{S}(\rho, v) = \rho \mathcal{G}(v + p(\rho)),$$

où  $\mathcal{G}$  désigne une fonction quelconque régulière, est une entropie du système. En particulier, déterminer le flux  $\mathcal{F}$  tel que

$$(\nabla_{\mathbf{v}} \mathcal{F})^t = (\nabla_{\mathbf{v}} \mathcal{S})^t A.$$

Donner des conditions sur  $\mathcal{G}$  pour que  $\mathcal{S}$  soit convexe (dériver par rapport aux variables conservatives  $\mathbf{u}$ ).