

Examen de rattrapage d'Analyse Numérique

Corrigé

Exercice 1. a) On a

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad f'(x) = 1 + \ln(x) > 0 \quad \forall x \in [1, +\infty[.$$

b) $\ln(e) = 1$ donc $x \ln(x) = e$ ssi $x = e$.

Ensuite on a

$$\phi'(x) = -\frac{a}{x \ln^2(x)} = -\frac{ax}{x^2 \ln^2(x)} = -\frac{ax}{f^2(x)},$$

ce qui donne

$$\phi'(f^{-1}(a)) = -\frac{f^{-1}(a)}{a},$$

et donc

$$|\phi'(f^{-1}(a))| < 1 \Leftrightarrow f^{-1}(a) < a \Leftrightarrow a > e.$$

c) On trouve

$$\psi(x) = \frac{x+2}{1+\ln(x)}.$$

On a $F'(x) = 1 + \ln(x) > 0$ et $F''(x) = \frac{1}{x} > 0 \quad \forall x \in [1, +\infty[$. Donc on doit chercher x_0 t.q. $F(x_0) > 0$, par exemple $x_0 = 3$.

Exercice 2. a) On a

$$\begin{aligned} E(1) &= 0 \quad \forall \omega, \\ E(x) &= 0 \quad \forall \omega, \\ E(x^2) &= \frac{2}{3} - 2\omega^2 = 0 \quad \text{ssi } \omega = \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

La méthode est donc toujours au moins d'ordre 1. Elle est d'ordre 3 pour $\bar{\omega} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ($n = 2$ est pair, donc l'ordre est $n + 1$).

b) $\int_1^3 \frac{1}{x} dx = \ln(3)$.

c) On pose $x = y + 2$. On trouve

$$\int_1^3 \frac{1}{x} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{y+2} dy = \frac{4}{4-\omega^2}.$$

Pour $\omega = \frac{1}{\sqrt{3}}$ on trouve $\ln(3) \sim \frac{12}{11}$.

d) On a

$$\begin{aligned} K_1(t) &= \frac{(1+t)^2}{2} > 0 \quad \text{si } t \in [-1, -\omega], \\ K_1(t) &= \frac{1+t^2}{2} - \omega \quad \text{si } t \in [-\omega, \omega], \\ K_1(t) &= \frac{(1-t)^2}{2} > 0 \quad \text{si } t \in [\omega, 1], \end{aligned}$$

donc $K_1(t) \geq 0 \quad \forall t \in [-1, 1]$ ssi $\omega \leq \frac{1}{2}$.

e) On a

$$C(\omega) = \int_{-1}^1 K_1(t) dt = \frac{1}{3} - \omega^2,$$

qui atteint son minimum pour $\omega = \frac{1}{2}$.

Exercice 3. a) On a les solutions $y(t) = t^2$ et $y(t) \equiv 0$.

b) La méthode de Newton donne la suite

$$y_{n+1} = y_n + 2\Delta t \sqrt{|y_n|} = \sqrt{|y_n|}(\sqrt{|y_n|} + 2\Delta t).$$

On voit facilement qu'on retrouve $y_n = 0 \forall n$.