

Examen VF ISITV/POLYTECH/CEMEF
du 24 février 2010
Corrigé

1. **(3 points)** On a

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho(v + p(\rho)) \end{pmatrix}, \quad f(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v(v + p(\rho)) \end{pmatrix}.$$

La deuxième équation se réécrit

$$\begin{aligned} 0 &= (v + p(\rho)) (\rho_t + (\rho v)_x) + \rho ((v + p(\rho))_t + v(v + p(\rho))_x) \\ &= v_t + v v_x + p'(\rho) (\rho_t + v \rho_x) \\ &= v_t + v v_x - p'(\rho) \rho v_x \\ &= v_t + (v - \rho p'(\rho)) v_x \end{aligned}$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = v - \rho p'(\rho)$ et $\lambda_2 = v$. Puisque $\rho p'(\rho) > 0$ pour $\rho > 0$, on a $\lambda_1 < \lambda_2$. Le système est donc strictement hyperbolique pour $\rho > 0$. Pour $\rho = 0$, les valeurs propres coïncident : $\lambda_1 = \lambda_2$.

2. **(2 points)** Les vecteurs propres sont

$$r_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ p'(\rho) \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et on a

$$\begin{aligned} \nabla \lambda_1 \cdot r_1 &= \begin{pmatrix} -p'(\rho) - \rho p''(\rho) \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ p'(\rho) \end{pmatrix} = 2p'(\rho) + \rho p''(\rho) > 0, \\ \nabla \lambda_2 \cdot r_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

3. **(2 points)** La condition

$$\nabla W_1 \cdot r_1 = \begin{pmatrix} \phi'(\rho) \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ p'(\rho) \end{pmatrix} = p'(\rho) - \phi'(\rho) = 0$$

donne $W_1 = v + p(\rho)$. La condition

$$\nabla W_2 \cdot r_2 = \begin{pmatrix} \phi'(\rho) \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \phi'(\rho) = 0$$

donne $W_2 = v$.

4. **(4 points)** La condition sur les invariants de Riemann donne la relation suivante

$$W_1(\rho, v) = W_1(\rho_L, v_L) \implies v + p(\rho) = v_L + p(\rho_L),$$

qui caractérise les détonations de la première famille. Les conditions de Rankine-Hugoniot sont satisfaites avec

$$\sigma = \frac{\rho v - \rho_L v_L}{\rho - \rho_L}.$$

Pour le deuxième champ on a

$$W_2(\rho, v) = W_2(\rho_L, v_L) \implies v = v_L,$$

qui caractérise les ondes de la deuxième famille. Les conditions de Rankine-Hugoniot sont satisfaites avec $\sigma = v = v_L$.

5. **(1 point)** Puisque $\sigma = v = v_L = 1$, il s'agit bien d'une onde de la deuxième famille.
6. **(4 points)** La méthode de Godunov donne

$$\mathbf{u}_j^1 = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \\ \frac{\bar{\rho}}{\rho(v+p(\rho))} \end{pmatrix}.$$

En particulier

$$v_1^1 = \frac{\overline{\rho(v+p(\rho))}}{\bar{\rho}} - p(\bar{\rho}) = \frac{\bar{\rho}v_o + \overline{\rho p(\rho)}}{\bar{\rho}} - p(\bar{\rho}) = v_o + \frac{\overline{\rho p(\rho)}}{\bar{\rho}} - p(\bar{\rho}) > v_o.$$

7. **(4 points)** On trouve

$$\nabla \mathcal{F} = \begin{pmatrix} v\mathcal{G} + \rho v p'(\rho)\mathcal{G}' \\ \rho\mathcal{G} + \rho v\mathcal{G}' \end{pmatrix},$$

donc on prend $\mathcal{F} = \rho v\mathcal{G}$.

Dérivant par rapport aux variables conservatives on obtient

$$D^2 \mathcal{S}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{y^2}{\rho^3} \mathcal{G}'' & -\frac{y}{\rho^2} \mathcal{G}'' \\ -\frac{y}{\rho^2} \mathcal{G}'' & \frac{1}{\rho} \mathcal{G}'' \end{pmatrix},$$

qui est définie positive si \mathcal{G} est convexe.