Université du Sud - Toulon - Var
ISITV - $2^{\text{ère}}$ année
Pôle Modélisation

Examen d'Éléments Finis du 3 avril 2009
Corrigé

Exercice 1. 1. **(4 points)** On obtient

$$\begin{aligned} N_1(x,y) &= 1 - \tfrac{1}{h}x - \tfrac{1}{h}y + \tfrac{1}{h^2}xy, \\ N_2(x,y) &= \tfrac{1}{h}x - \tfrac{1}{h^2}xy, \\ N_3(x,y) &= \tfrac{1}{h^2}xy, \\ N_4(x,y) &= \tfrac{1}{h}y - \tfrac{1}{h^2}xy. \end{aligned}$$

2. **(5 points)** On obtient

$$B_k^{Q,loc} = \frac{h^2}{4}, \quad \text{pour } k = 1, \ldots, 4.$$

3. **(4 points)** La méthode d'éléments finis donne

$$\frac{8}{3}u_j - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{8} u_{j_k} = \frac{h^2}{4}.$$

4. **(2 points)** La méthode des différences finies donne

$$4u_j - u_{j_1} - u_{j_3} - u_{j_5} - u_{j_7} = h^2.$$

On peut interpréter le schéma à 9 points comme étant une combinaison du schéma à 5 points et du schéma a 5 points obtenu après rotation des axes de $\pi/4$ et avec pour nouveau pas $h\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{3}\big(4u_j - u_{j_1} - u_{j_3} - u_{j_5} - u_{j_7} - h^2\big) \\ &+\tfrac{1}{3}\big(4u_j - u_{j_2} - u_{j_4} - u_{j_6} - u_{j_8} - 2h^2\big) = 0. \end{aligned}$$

Exercice 2 (5 points).
On multiplie l'équation vérifiée par u dans Ω par une fonction test v telle que $v = \partial v/\partial n = 0$ sur $\partial\Omega$. On intègre l'équation obtenue sur Ω. Par intégrations par partie successives, on obtient

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Delta(\Delta u)v\,dx &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Delta u}{\partial n}\,v\,ds - \int_\Omega \nabla(\Delta u)\cdot\nabla v\,dx \\ &= \int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial \Delta u}{\partial n}\,v - \Delta u\,\frac{\partial v}{\partial n}\right)ds + \int_\Omega \Delta u\,\Delta v\,dx \\ &= \int_\Omega f v\,dx. \end{aligned}$$

Comme $v = \partial v/\partial n = 0$ sur $\partial\Omega$, on en déduit que

$$\int_\Omega \Delta u \ \Delta v \ dx = \int_\Omega fv \ dx. \tag{1}$$

La formulation variationnelle associée au problème consiste donc à déterminer

$$u \in X = \left\{ w \in C^2(\bar{\Omega}) \colon w = \partial w/\partial n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}$$

tel que (1) soit vérifié pour tout $v \in X$.